1. (Faculdade Albert Einstein 2016) Em uma urna vazia foram colocadas fichas iguais, em cada uma das quais foi escrito apenas um dos anagramas da palavra HOSPITAL. A probabilidade de que, ao sortear-se uma única ficha dessa urna, no anagrama nela marcado as letras inicial e final sejam ambas consoantes é

a) $\frac{5}{14}$
b) $\frac{3}{7}$
c) $\frac{4}{7}$
d) $\frac{9}{14}$

Resposta:

[A]

O número total de anagramas da palavra HOSPITAL é igual a permutação de 8, ou seja, $8!$. O número de anagramas que começam e terminam com consoantes é igual a:
$5 \cdot 4 \cdot P_6 = 5 \cdot 4 \cdot 6!$

A probabilidade de que, ao sortear-se uma única ficha dessa urna, no anagrama nela marcado as letras inicial e final sejam ambas consoantes será de:
$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 6!}{8!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 6!}{8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

2. (G1 - ifsp 2016) Um banco está testando um novo produto e disponibilizou a alguns dos seus clientes acesso via internet para esse produto, por meio de senhas compostas por cinco vogais distintas e dois números pares distintos, de 2 a 8, nessa ordem, ou seja, primeiro as vogais e depois os números. O número de clientes que podem acessar esse novo produto, via internet, é:
a) 22.
b) 3.520.
c) 1.440.
d) 180.
e) 920.

Resposta:

[C]

Considerando as vogais: a, e, i, o e u; existem $P_5 = 5!$ modos de dispor as vogais, 4 modos de escolher o primeiro algarismo par e 3 modos de escolher o segundo algarismo par. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $5! \cdot 4 \cdot 3 = 1.440.$

3. (Espcex (Aman) 2016) Da análise combinatória, pode-se afirmar que

a) o número de múltiplos inteiros e positivos de 11, formados por três algarismos, é igual a 80.

b) a quantidade de números ímpares de quatro algarismos distintos que podemos formar com os dígitos $2, 3, 4, 5$ e 6 é igual a 24.

c) o número de anagramas da palavra ESPCEX que têm as vogais juntas é igual a 60.

d) no cinema, um casal vai sentar-se em uma fileira com dez cadeiras, todas vazias. O número de maneiras que poderão sentar-se em duas cadeiras vizinhas é igual a 90.

e) a quantidade de funções injetoras definidas em $A = \{1, 3, 5\}$ com valores em $B = \{2, 4, 6, 8\}$ é igual a 24.

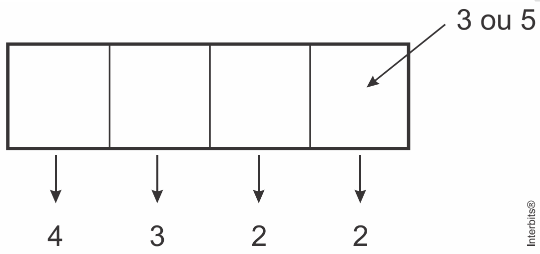
Resposta:

[E]

[A] Falsa. O menor múltiplo de 11 de três algarismos é o 110 e o maior número múltiplo de 11 com 3 algarismos é 990. Temos então uma P.A. de n termos, de razão 11, primeiro termo igual a 110 e último termo igual a 990.

$$990 = 110 + (n-1)\cdot 11 \Rightarrow n - 1 = 80 \Rightarrow n = 81.$$

[B] Falsa, pois a quantidade correta é 48.



$$4\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 48$$

[C] Falsa. A quantidade correta é $5! = 120$.

[D] Falsa, pois existem 9 lugares para o casal se sentar em duas cadeiras vizinhas, sem esquecer a permutação das pessoas que formam o casal, temos $9\cdot 2! = 18$.

[E] Verdadeira. O número de funções injetoras de A em B será dado pelo arranjo de 4 elementos três a três:

$$A_{4,3} = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$$

4. (Ita 2016) Pintam-se N cubos iguais utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face. Considerando que cada cubo pode ser perfeitamente distinguido dos demais, o maior valor possível de N é igual a

a) 10

b) 15

c) 20

d) 25

e) 30

Resposta:

[E]

Face superior do cubo: 6 possibilidades de cor
Face interior do cubo: 5 possibilidades de cor.
Faces Laterais do cubo: $(4-1)!=6$ (permutação circular)

Considerando que cada uma das faces pode ser a face superior, o número de cubos possíveis é:

$$N=\frac{6\cdot 5\cdot 6}{6}=30$$

5. (Epcar (Afa) 2016) Uma caixa contém 10 bolas das quais 3 são amarelas e numeradas de 1 a 3; 3 verdes numeradas de 1 a 3 e mais 4 bolas de outras cores todas distintas e sem numeração.
A quantidade de formas distintas de se enfileirar essas 10 bolas de modo que as bolas de mesmo número fiquem juntas é
a) $8\cdot 7!$
b) $7!$
c) $5\cdot 4!$
d) $10!$

Resposta:

[A]

Pode-se extrair do enunciado que:
$3 \text{ bolas amarelas} \rightarrow A_1, A_2, A_3$
$3 \text{ bolas verdes} \rightarrow V_1, V_2, V_3$
$4 \text{ bolas coloridas} \rightarrow C_1, C_2, C_3, C_4$

Importante ressaltar que, embora as 4 bolas coloridas não sejam numeradas, elas são todas distintas entre si. Matematicamente, não importa se estas são distintas por cores ou numeração, motivo pela qual elas foram nomeadas como C_1, C_2, C_3 e C_4.

Os conjuntos de mesmo número devem ficar juntos, porém o enunciado é claro em afirmar a “quantidade de formas distintas” ou seja, a ordem é importante.

Pode-se reorganizar as 10 bolas, considerando que as de mesma numeração fiquem juntas, em 7 blocos. Para ilustrar melhor, pode-se identificar a primeira maneira de enfileirar as 10 bolas:

$\boxed{A_1V_1}\ \boxed{A_2V_2}\ \boxed{A_3V_3}\ \boxed{C_1}\ \boxed{C_2}\ \boxed{C_3}\ \boxed{C_4}$

Daí, nota-se que o número de maneiras de enfileirar estes 7 blocos identificados seria permutação de 7, ou seja $7!$.

Porém, é preciso lembrar que os blocos com elementos de mesma numeração também podem ser permutados, pois como já vimos, a ordem é importante.

Assim, o número de maneiras que podemos permutar esses elementos isoladamente será:

$\boxed{A_1V_1} \rightarrow$ permutação de 2, ou seja, $2! = 2 \cdot 1 = 2$

$\boxed{A_2V_2} \rightarrow$ permutação de 2, ou seja, $2! = 2 \cdot 1 = 2$

$\boxed{A_3V_3} \rightarrow$ permutação de 2, ou seja, $2! = 2 \cdot 1 = 2$

Assim, o número de maneias distintas de se enfileirar essas 10 bolas de modo que as bolas de mesmo número fiquem juntas será:
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7! = 8 \cdot 7!$

6**.** (Espcex (Aman) 2016) A solução da equação $\dfrac{3!(x-1)!}{4(x-3)!} = \dfrac{182(x-2)! - x!}{2(x-2)!}$ é um número natural

a) maior que nove.
b) ímpar.
c) cubo perfeito.
d) divisível por cinco.
e) múltiplo de três.

Resposta:

[C]

$$\frac{3! \cdot (x-1)!}{4 \cdot (x-3)!} = \frac{182 \cdot (x-2)! - x!}{2 \cdot (x-2)!} \Rightarrow \frac{3! \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{4} = \frac{182 - x(x-1)}{2} \Rightarrow 6(x-1)(x-2) = 364 - 2x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 20x - 352 = 0 \Rightarrow 8x^2 - 20x - 88 = 0$$

$x = \dfrac{5 \pm 27}{2} \Rightarrow x = 8$ ou $x = 22/4$ (não convém)

Portanto, 8 é um cubo perfeito.

7**.** (Epcar (Afa) 2015) Um turista queria conhecer três estádios da Copa do Mundo no Brasil não importando a ordem de escolha. Estava em dúvida em relação às seguintes situações:

I. obrigatoriamente, conhecer o Estádio do Maracanã.
II. se conhecesse o Estádio do Mineirão, também teria que conhecer a Arena Pantanal, caso contrário, não conheceria nenhum dos dois.

Sabendo que a Copa de 2014 se realizaria em 12 estádios brasileiros, a razão entre o número de modos distintos de escolher a situação I e o número de maneiras diferentes de escolha para a situação II, nessa ordem, é

a) $\dfrac{11}{26}$

b) $\frac{13}{25}$

c) $\frac{13}{24}$

d) $\frac{11}{24}$

Resposta:

[A]

Para a situação I, existem $\binom{11}{2} = \frac{11!}{2! \cdot 9!} = 55$ escolhas possíveis. Para a situação II, o número de possibilidades é dado por $10 + \binom{10}{3} = 10 + \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 130.$ Em consequência, a resposta é $\frac{55}{130} = \frac{11}{26}.$

8**.** (Fgv 2015) Em uma sala estão presentes n pessoas, com $n > 3.$ Pelo menos uma pessoa da sala não trocou aperto de mão com todos os presentes na sala, e os demais presentes trocaram apertos de mão entre si, e um único aperto por dupla de pessoas. Nessas condições, o número máximo de apertos trocados pelas n pessoas é igual a

a) $\frac{n^2 + 3n - 2}{2}$

b) $\frac{n^2 - n + 2}{2}$

c) $\frac{n^2 + 2n - 2}{2}$

d) $\frac{n^2 - 3n + 2}{2}$

e) $\frac{n^2 - n - 2}{2}$

Resposta:

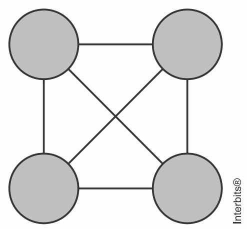
[D]

Gabarito Oficial: [E]
Gabarito SuperPro®: [D]

O resultado pedido se dá quando o número de pessoas que não trocou aperto de mão com todos os presentes na sala é mínimo, ou seja, igual a $1.$
Portanto, a reposta é

$$\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}.$$

9. (Insper 2015) No *jogo da multiplicação unitária* deve-se preencher cada um dos círculos sombreados na figura com um dos números 1 ou $-1.$ Em seguida, deve-se multiplicar os números dois a dois, obtendo um resultado para cada linha que liga dois círculos. Por último, deve-se somar os resultados de todas essas multiplicações, obtendo o resultado do jogo.



O menor resultado que esse jogo pode ter é
a) $0.$
b) $-1.$
c) $-2.$
d) $-4.$
e) $-6.$

Resposta:

[C]

O resultado será mínimo quando o número de produtos iguais a -1 for máximo. Tem-se que o número de produtos possíveis é igual a $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6.$ Ademais, se x é a quantidade de números iguais a 1 e y é a quantidade de números iguais a $-1,$ temos

$(x, y) \in \{(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4)\}.$

É imediato que as possibilidades $(4, 0)$ e $(0, 4)$ não convêm. Logo, por inspeção, concluímos que $(x, y) = (2, 2),$ com os números dispostos em quaisquer círculos.

A resposta é

$1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = -2.$

10. (Mackenzie 2015) O número de polígonos convexos distintos que podemos formar, com vértices nos pontos de coordenadas $(0, 0),$ $(0, 1),$ $(0, 2),$ $(0, 3),$ $(2, 0),$ $(2, 1),$ $(2, 2)$ e $(2, 3),$ do plano, é
a) 101
b) 84
c) 98
d) 100
e) 48

Resposta:

[B]

É possível formar apenas triângulos e quadriláteros.

Existem 4 maneiras de escolher um dos pontos sobre o eixo das ordenadas e $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ modos de escolher dois pontos da reta $x = 2.$ Assim, pelo Princípio Multiplicativo, é possível formar $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ triângulos (note que é possível escolher dois pontos do eixo das ordenadas e um ponto da reta $x = 2$).

Para formar quadriláteros, é necessário tomar dois pontos sobre o eixo das ordenadas e dois pontos sobre a reta $x = 2.$ Isso pode ser feito de $6 \cdot 6 = 36$ maneiras.

Em consequência, pelo Princípio Aditivo, a resposta é $48 + 36 = 84.$

11**.** (Pucsp 2015) No vestiário de uma Academia de Ginástica há exatamente 30 armários, cada qual para uso individual. Se, no instante em que dois alunos dessa Academia entram no vestiário para mudar suas roupas, apenas 8 dos armários estão desocupados, quantas opções eles terão para escolher seus respectivos armários?
a) 14
b) 28
c) 48
d) 56
e) 112

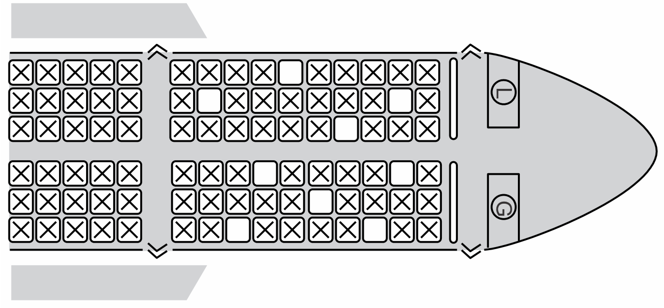
Resposta:

[D]

O número de opções que eles terão para escolher seus respectivos armários é igual ao arranjo de
8 armários 2 a 2. Ou seja:

$$A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$$

12**.** (Enem 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site* as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\dfrac{9!}{2!}$

b) $\dfrac{9!}{7! \times 2!}$

c) $7!$

d) $\dfrac{5!}{2!} \times 4!$

e) $\dfrac{5!}{4!} \times \dfrac{4!}{3!}$

Resposta:

[A]

O resultado pedido corresponde ao número de arranjos simples de 9 objetos tomados 7 a 7, isto é, $A_{9,\,7} = \dfrac{9!}{2!}$.

13. (Espcex (Aman) 2015) Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 3, 5, 7, 9 e, escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. A soma de todos os números assim formados é igual a

a) $1\,000\,000.$

b) $1\,111\,100.$

c) $6\,000\,000.$

d) $6\,666\,000.$

e) $6\,666\,600.$

Resposta:

[E]

Cada um dos algarismos acima aparecerá $4! = 24$ vezes em cada ordem decimal.

A soma dos algarismos é 25. Portanto, a soma dos algarismos em cada ordem decimal será $24 \cdot 25 = 600.$

Concluímos então que a soma S pedida é:
$S = 24 \cdot 25 \cdot \left(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1\right) = 600 \cdot 11111 = 6.666.600.$

14. (Enem 2015) Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas $6, 7, 8, 9$ ou $10.$ A campeã será a escola que obtiver mais pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?
a) 21
b) 90
c) 750
d) 1.250
e) 3.125

Resposta:

[C]

Observando a diferença entre a pontuação total da Escola II e a das outras escolas, tem-se que a Escola II será campeã quaisquer que sejam as notas das Escolas I, III e V. Logo, em relação a essas escolas, há 5 notas favoráveis para cada uma.

Por outro lado, como a Escola II vence a Escola IV em caso de empate, e tendo a Escola IV uma vantagem de dois pontos em relação à Escola II, a última será campeã nos seguintes casos:

6 para a Escola IV e $8, 9$ ou 10 para a Escola II;
7 para a Escola IV e 9 ou 10 para a Escola II;
8 para a Escola IV e 10 para a Escola II.

Em consequência, a resposta é $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750.$

15. (Fgv 2015) Conforme indica a figura, uma caixa contém 6 letras F azuis e 5 brancas, a outra contém 4 letras G azuis e 7 brancas, e a última caixa contém 6 letras V azuis e 6 brancas.

Em um jogo, uma pessoa vai retirando letras das caixas, uma a uma, até que forme a sigla FGV com todas as letras da mesma cor. A pessoa pode escolher a caixa da qual fará cada retirada, mas só identifica a cor da letra após a retirada. Usando uma estratégia conveniente, o número mínimo de letras que ela deverá retirar para que possa cumprir a tarefa com toda certeza é
a) 14.
b) 15.
c) 16.
d) 17.
e) 18.

Resposta:

[B]

A estratégia conveniente é retirar as letras na ordem FGV ou GFV. De fato, considerando a sequência FGV, para que as letras sejam da mesma cor, pelo Princípio das Gavetas, a pessoa deverá retirar 6 letras F, 8 letras G e 1 letra V, totalizando 15 letras. O raciocínio para a sequência GFV é análogo.

16. (Unesp 2015) As urnas 1, 2 e 3 contêm, respectivamente, apenas as letras das palavras OURO, PRATA e BRONZE. Uma a uma são retiradas letras dessas urnas, ordenadamente e de forma cíclica, ou seja, a primeira letra retirada é da urna 1, a segunda é da urna 2, a terceira é da urna 3, a quarta volta a ser da urna 1, a quinta volta a ser da urna 2, e assim sucessivamente. O número mínimo de letras retiradas das urnas dessa maneira até que seja possível formar, com elas, a palavra PRAZER é igual a
a) 8.
b) 6.
c) 10.
d) 9.
e) 7.

Resposta:

[A]

Observando que as letras P e A figuram apenas na urna 2, e que as letras E e Z figuram apenas na urna 3, podemos concluir que serão necessárias pelo menos 6 extrações a fim de retirar tais letras. Além disso, como a letra R figura uma vez em cada urna, o primeiro R deverá ser retirado da urna $1,$ e o segundo da urna 2, totalizando 8 retiradas. Caso contrário, o número de letras retiradas será igual a $9.$

17. (Unicamp 2015) O número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelo menos três pessoas nascidas no mesmo dia da semana é igual a
a) 21.
b) 20.
c) 15.
d) 14.

Resposta:

[C]

Como a semana tem 7 dias, para garantir que há pelo menos três pessoas no mesmo dia da semana, é necessário que haja pelo menos $2 \cdot 7 + 1 = 15$ pessoas no grupo.

18. (Fgv 2015) O total de números pares não negativos de até quatro algarismos que podem ser formados com os algarismos $0,$ $1,$ 2 e $3,$ sem repetir algarismos, é igual a
a) 26.
b) 27.
c) 28.
d) 29.
e) 30.

Resposta:

[B]

Com um algarismo podemos formar apenas dois números pares: 0 e $2.$
Com dois algarismos, podemos formar os números: $10, 12, 20, 30$ e $32.$
Com três algarismos, fixando o zero no algarismo das unidades, temos $3 \cdot 2 = 6$ números. Além disso, fixando o 2 no algarismo das unidades, temos $2 \cdot 2 = 4$ números. Logo, pelo Princípio Aditivo, há $6 + 4 = 10$ possibilidades.
Com quatro algarismos, fixando o zero no algarismo das unidades, temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ números. Ademais, fixando o 2 no algarismo das unidades, há $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ números. Em consequência, novamente pelo Princípio Aditivo, existem $6 + 4 = 10$ números.
A resposta é $2 + 5 + 10 + 10 = 27.$

19. (Unesp 2014) Um professor, ao elaborar uma prova composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada e apenas uma correta, deseja que haja um equilíbrio no

número de alternativas corretas, a serem assinaladas com X na folha de respostas. Isto é, ele deseja que duas questões sejam assinaladas com a alternativa A, duas com a B, e assim por diante, como mostra o modelo.

Modelo de folha de resposta (gabarito)

	A	B	C	D	E
01	X				
02			X		
03		X			
04				X	
05	X				
06					X
07				X	
08					X
09		X			
10			X		

Nessas condições, a quantidade de folha de respostas diferentes, com a letra X disposta nas alternativas corretas, será
a) 302 400.
b) 113 400.
c) 226 800.
d) 181 440.
e) 604 800.

Resposta:

[B]

$C_{10,2} \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = 45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 113400$

20**.** (Espm 2014) Os binomiais $\binom{11}{4x}$ e $\binom{x+3y}{y}$ são complementares e, por isso, são iguais.

Seu valor é:

a) 165
b) 330
c) 55
d) 462
e) 11

Resposta:

[A]

Se $\binom{11}{4x}$ e $\binom{x+3y}{y}$ são complementares, então $x+3y=11$ e $4x+y=11.$ Em consequência, tem-se $x=2$ e $y=3.$ Portanto, $\binom{11}{4x}=\binom{11}{8}=\frac{11!}{8!\cdot 3!}=165.$

21. (Insper 2014) Um dirigente sugeriu a criação de um torneio de futebol chamado Copa dos Campeões, disputado apenas pelos oito países que já foram campeões mundiais: os três sul-americanos (Uruguai, Brasil e Argentina) e os cinco europeus (Itália, Alemanha, Inglaterra, França e Espanha). As oito seleções seriam divididas em dois grupos de quatro, sendo os jogos do grupo A disputados no Rio de Janeiro e os do grupo B em São Paulo. Considerando os integrantes de cada grupo e as cidades onde serão realizados os jogos, o número de maneiras diferentes de dividir as oito seleções de modo que as três sul-americanas não fiquem no mesmo grupo é
a) 140.
b) 120.
c) 70.
d) 60.
e) 40.

Resposta:

[D]

Existem 2 maneiras de escolher o grupo que terá duas seleções sul-americanas, $\binom{3}{2} = 3$ modos de escolher essas duas seleções, e $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ modos de escolher as duas seleções europeias que irão formar o grupo com as duas sul-americanas. Como o segundo grupo é determinado univocamente pelas escolhas do primeiro, segue-se que o resultado pedido, pelo Princípio Fundamental da Contagem, é $2 \cdot 3 \cdot 10 = 60$.

22. (Enem 2014) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?
a) $20 \times 8! + (3!)^2$
b) $8! \times 5! \times 3!$
c) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$
d) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$
e) $\frac{16!}{2^8}$

Resposta:

[B]

Considere 16 posições consecutivas de uma fila, em que as posições de ordem ímpar serão ocupadas pelos 8 filmes de ação, as 5 primeiras posições de ordem par serão ocupadas pelos filmes de comédia, e as 3 últimas posições de ordem par serão ocupadas pelos filmes de drama. Daí, os filmes de ação podem ser dispostos de $P_8 = 8!$ modos, os de comédia de $P_5 = 5!$ maneiras e os de drama de $P_3 = 3!$ possibilidades. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue-se que o resultado é $8! \times 5! \times 3!$.

23. (Fgv 2014) Uma senha de internet é constituída de seis letras e quatro algarismos em que a ordem é levada em consideração. Eis uma senha possível: (a, a, b, 7, 7, b, a, 7, a, 7).
Quantas senhas diferentes podem ser formadas com quatro letras “a”, duas letras “b” e quatro algarismos iguais a 7?
a) 10!
b) 2 520
c) 3 150
d) 6 300
e) $\frac{10!}{4!6!}$

Resposta:

[C]

O resultado é dado por

$$P_{10}^{(4,\,2,\,4)} = \frac{10!}{4! \cdot 2! \cdot 4!} = 3150.$$

24. (Mackenzie 2014) Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. O número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado é
a) $9 \cdot (9!)$
b) $8 \cdot (9!)$
c) $8 \cdot (8!)$
d) $\frac{10!}{2}$
e) $\frac{10!}{4}$

Resposta:

[B]

As 10 pessoas podem se sentar de $P_{10} = 10!$ maneiras. Por outro lado, o casal que está brigado pode se sentar lado a lado de $P_9 \cdot P_2 = 2 \cdot 9!$ modos. Em consequência, o resultado pedido é $10! - 2 \cdot 9! = 10 \cdot 9! - 2 \cdot 9! = 8 \cdot 9!$.

25**.** (Enem PPL 2014) Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas.

Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por
a) 100.
b) 90.
c) 80.
d) 25.
e) 20.

Resposta:

[A]

Supondo que serão utilizadas apenas as vogais a, e, i, o e u, segue-se, pelo Princípio Multiplicativo, que a resposta é $10 \cdot 10 = 100$.

Observação: *Considerando o acordo ortográfico de 2009, a questão não teria resposta.*

26**.** (Insper 2014) Desde o dia da partida inaugural até o dia da final de um torneio de futebol, terão sido transcorridos 32 dias. Considerando que serão disputados, ao todo, 64 jogos nesse torneio, pode-se concluir que, necessariamente,
a) ocorrerão duas partidas por dia no período de disputa do torneio.
b) haverá um único jogo no dia em que for disputada a final.
c) o número médio de jogos disputados por equipe será, no máximo, 2.
d) ocorrerá pelo menos um dia sem jogos no período de disputa do torneio.
e) haverá duas partidas do torneio que ocorrerão no mesmo dia.

Resposta:

[E]

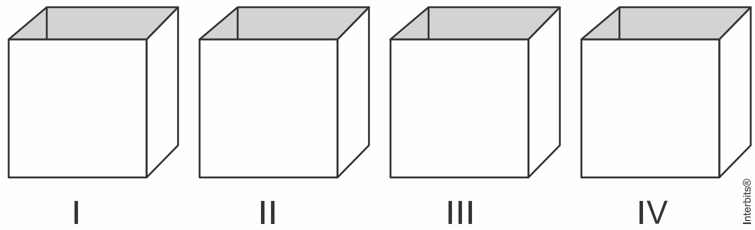
Seja $[x]$ o maior inteiro menor do que ou igual a x.

Pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, haverá pelo menos

$$\left[\frac{64-1}{32}\right] + 1 = [1{,}96875] + 1 = 1 + 1 = 2$$

partidas do torneio que ocorrerão no mesmo dia.

27**.** (Epcar (Afa) 2014) Sr. José deseja guardar 4 bolas – uma azul, uma branca, uma vermelha e uma preta – em 4 caixas numeradas:



O número de maneiras de Sr. José guardar todas as 4 bolas de forma que uma mesma caixa **NÃO** contenha mais do que duas bolas, é igual a
a) 24
b) 36
c) 144
d) 204

Resposta:

[D]

Se não houvesse restrições de número de bolas por caixa, o total de maneiras possíveis de guardar as 4 bolas seria de $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256.$ Porém, de acordo com a restrição imposta no enunciado, deste total é preciso descontar as maneiras que contemplam mais de duas bolas por caixa, ou seja:

1) Uma caixa com 3 bolas, outra com 1 e as outras duas com nenhuma:

$$4 \cdot C_4^3 \cdot 3 \cdot C_1^1 = 4 \cdot \frac{4!}{3!} \cdot 3 = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48 \text{ maneiras}$$

2) Uma caixa com 4 bolas e as outras com nenhuma: há apenas 4 possibilidades, visto que só existem 4 caixas e que todas as bolas serão guardadas na mesma caixa.

Assim, o total de maneiras de Sr. José pode guardar todas as 4 bolas de forma que uma mesma caixa não contenha mais do que duas bolas, é igual a $256 - 48 - 4 = 204.$

28**.** (Epcar (Afa) 2014) Distribuiu-se, aleatoriamente, 7 bolas iguais em 3 caixas diferentes. Sabendo-se que nenhuma delas ficou vazia, a probabilidade de uma caixa conter, exatamente, 4 bolas é
a) 25%
b) 30%
c) 40%
d) 48%

Resposta:

[C]

Sabendo-se que nenhuma das caixas ficou vazia, só existem 4 possibilidades de distribuição, cada qual com possibilidades de permutação de seus elementos. São elas:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Distribuição } 1 \to \{5\,;1;1\} \to \text{Permutação } P_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3 \\ \text{Distribuição } 2 \to \{4\,;2\,;1\} \to \text{Permutação } P_3 = 3! = 6 \\ \text{Distribuição } 3 \to \{3\,;2\,;2\} \to \text{Permutação } P_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3 \\ \text{Distribuição } 4 \to \{3\,;3\,;1\} \to \text{Permutação } P_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3 \end{array}\right\} \text{Total de 15 possibilidades de distribuição}$$

Assim a probabilidade de uma caixa conter exatamente 4 bolas é igual a:

$$\frac{\text{P(distribuição 2)}}{\text{P(total de distribuições)}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}40 \Rightarrow 40\%$$