1. (Espcex (Aman) 2016) Considere as funções reais f e g, tais que $f(x) = \sqrt{x} + 4$ e $f(g(x)) = x^2 - 5$, onde $g(x)$ é não negativa para todo x real. Assinale a alternativa cujo conjunto contém todos os possíveis valores de x, que satisfazem os dados do enunciado.

a) $\mathbb{R} - \left]-3, 3\right[$

b) $\mathbb{R} - \left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[$

c) $\left]-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right[$

d) $\left]-3, 3\right[$

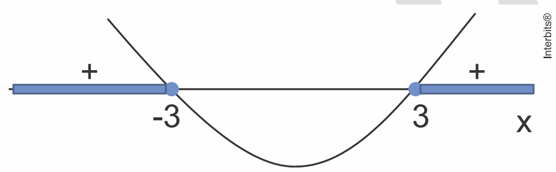
e) $\mathbb{R} - \left]-\infty, 3\right[$

Resposta:

[A]

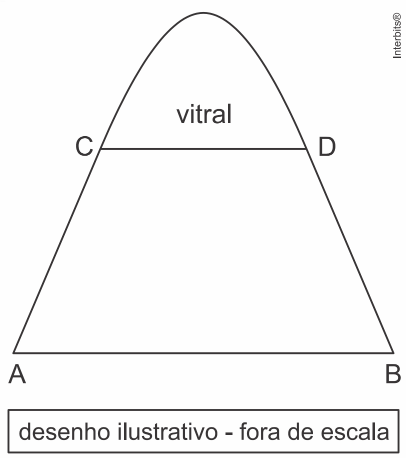
$$f(g(x) = x^2 - 5$$
$$\sqrt{g(x)} + 4 = x^2 - 5$$
$$\sqrt{g(x)} = x^2 - 9$$

Para que $g(x)$ seja não negativa devemos admitir $\sqrt{g(x)} \geq 0$



Portanto, os valores pedidos são $\mathbb{R} - \left]-3, 3\right[$.

2. (Espcex (Aman) 2016) Um portal de igreja tem a forma de um arco de parábola, conforme figura abaixo. A medida da sua base AB é 4 m e da sua altura é 5 m. Um vitral foi colocado $3{,}2\text{ m}$ acima da base. Qual a medida CD da base, em metros?

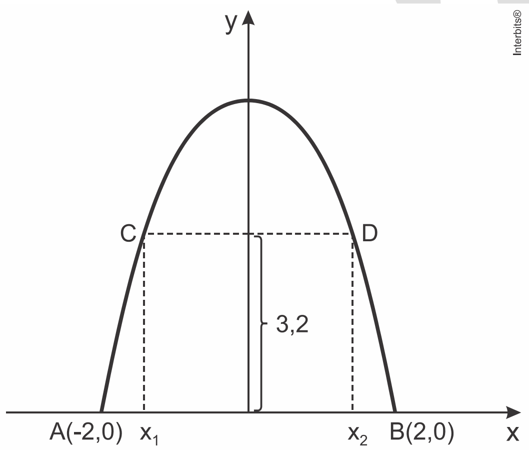


a) 1,44
b) 1,80
c) 2,40
d) 3,00
e) 3,10

Resposta:

[C]

Inicialmente associaremos a parábola com um sistema cartesiano.



Determinaremos agora a função do segundo grau que representa esta parábola no sistema cartesiano escolhido.

$y = a(x-2)\cdot(x-(-2))$

$y = a(x^2-4)$

A parábola passa pelo ponto $(0, 5)$, portanto:

$5 = a\cdot(-4) \Rightarrow a = -\frac{5}{4}$

Portanto, $y = -\frac{5}{4}\cdot\left(x^2-4\right)$

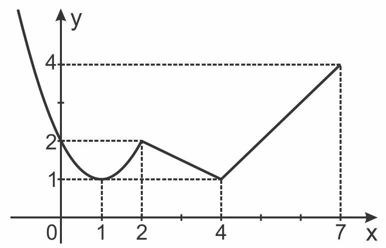
Admitindo $y = 3,2$ para determinar os valores de x_1 e x_2, coordenadas dos pontos C e D, respectivamente.

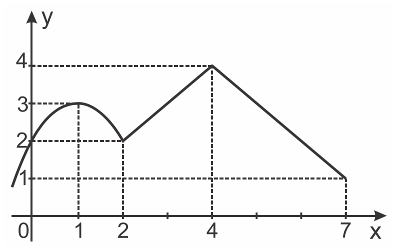
$$3,2 = -\frac{5}{4} \cdot (x^2 - 4) \Rightarrow -2,56 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = 1,44 \Rightarrow x_2 = 1,2 \quad \text{e} \quad x_1 = -1,2$$

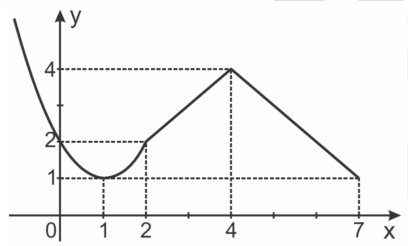
Portanto, $CD = x_2 - x_1 = 1,2 - (-1,2) = 2,4.$

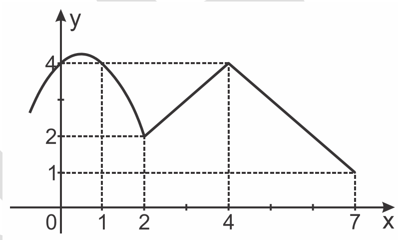
3. (Espcex (Aman) 2016) O gráfico que melhor representa a função real definida por

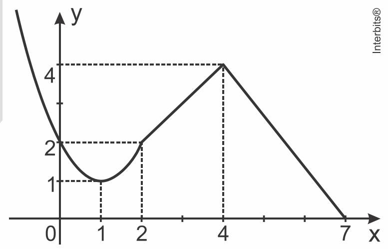
$$\begin{cases} 4 - |x - 4|, \text{ se } 2 < x \le 7 \\ x^2 - 2x + 2, \text{ se } x \le 2 \end{cases} \text{ é}$$

a) 

b) 

c) 

d) 

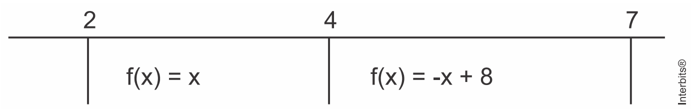
e) 

Resposta:

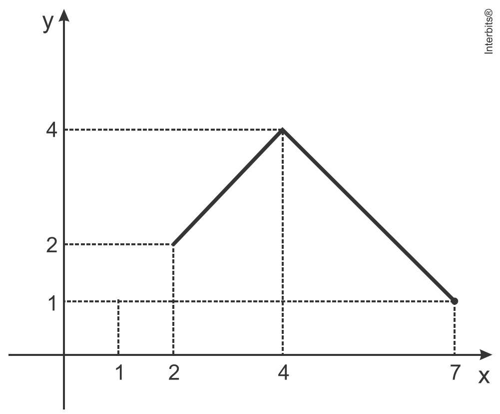
[C]

Construindo o gráfico da função $f(x) = 4 - |4 - x|,$ para $2 \leq x \leq 7.$

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$



Construindo o gráfico para $2 \leq x \leq 7,$ temos:



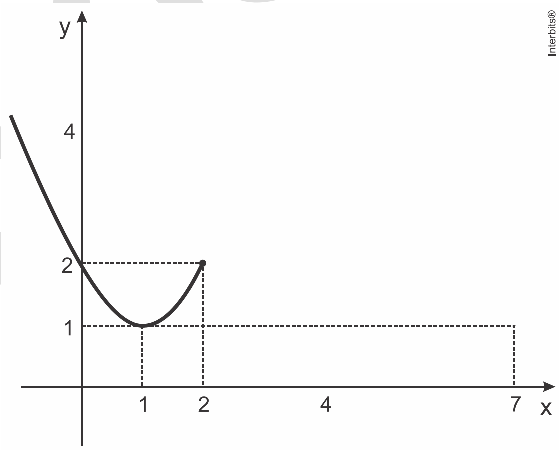
Construindo agora o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 2,$ para $x \leq 2.$
Intersecção com o eixo $y: (0, 2)$
Não intercepta o eixo $x,$ pois $\Delta = -4.$
Vértice

$$x_V = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = -1$$

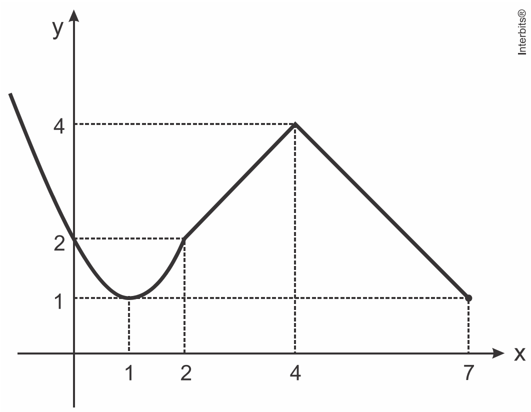
$$y_V = -\frac{\Delta}{4 \cdot a} = -\frac{(-4)}{4 \cdot 1} = 1$$

$V(1,1)$

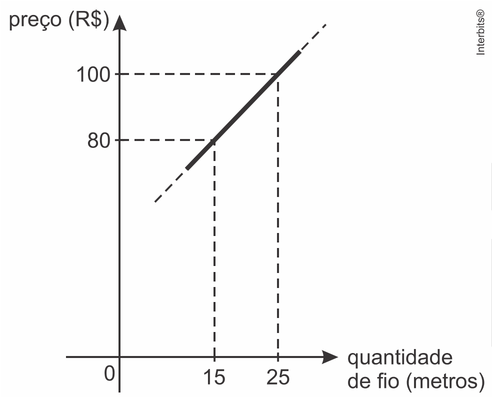
$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2$



Portanto, o gráfico da função pedida será:



4. (Epcar (Afa) 2016) Para fazer uma instalação elétrica em sua residência, Otávio contatou dois eletricistas.
O Sr. Luiz, que cobra uma parte fixa pelo orçamento mais uma parte que depende da quantidade de metros de fio requerida pelo serviço. O valor total do seu serviço está descrito no seguinte gráfico:



Já o Sr. José cobra, apenas, R$ 4,50 por metro de fio utilizado e não cobra a parte fixa pelo orçamento.
Com relação às informações acima, é correto afirmar que
a) o valor da parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz é maior do que R$ 60,00
b) o Sr. Luiz cobra mais de R$ 2,50 por metro de fio instalado.
c) sempre será mais vantajoso contratar o serviço do Sr. José.
d) se forem gastos 20 m de fio não haverá diferença de valor total cobrado entre os eletricistas.

Resposta:

[D]

Analisando as alternativas::

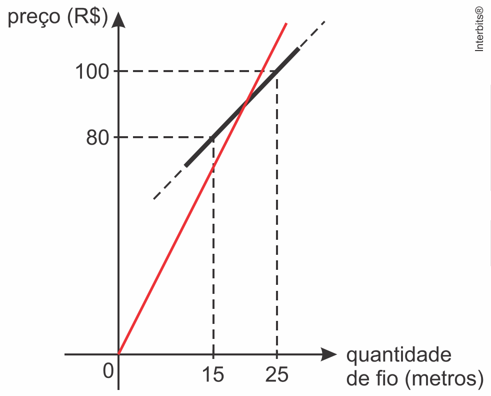
[A] INCORRETA. A parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz corresponde ao ponto onde a reta apresentada corta o eixo y (ou seja, quando a quantidade de fios é igual a zero). Para encontrar a equação da reta, faz-se:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \rightarrow y - 80 = \frac{100 - 80}{25 - 15}(x - 15) \rightarrow y = 2x + 50$$

Assim, quando $x = 0$, $y = 50$. Logo, a parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz equivale a R$ 50,00.
A alternativa é incorreta.

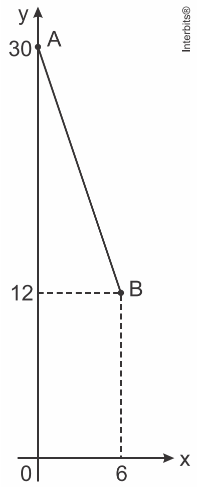
[B] INCORRETA. Pela equação do gráfico que representa o orçamento do Sr. Luiz, percebe-se que ele cobra a parte fixa de R$ 50,00 mais R$ 2,00 a cada metro de fio instalado $(y = 2x + 50)$. Portanto, a alternativa é incorreta.

[C] INCORRETA. Se o Sr. José cobra R$ 4,50 por metro de fio utilizado, então a função de seu orçamento é uma reta que passa pela origem e cuja equação é $y = 4{,}5x$. Percebe-se, pela análise dos coeficientes angulares, que a reta que representa o valor cobrado pelo Sr. José começa na origem mas cresce mais rápido que a reta que representa o valor cobrado pelo Sr. Luiz. Assim, até as duas retas se encontrarem, será vantajoso contratar os serviços do Sr. José. Após isso, será mais vantajoso contratar os serviços do Sr. Luiz. Na figura a seguir, a linha vermelha indica a função do orçamento do Sr. José. Portanto a alternativa é incorreta.



[D] CORRETA. Substituindo a quantidade de fios $x = 20$ nas duas equações, tem-se:
Sr. Luiz $\rightarrow y = 2x + 50 = 2 \cdot 20 + 50 = 90$
Sr. José $\rightarrow y = 4{,}5x = 4.5 \cdot 20 = 90$
Portanto, se forem gastos 20 metros de fio ambos os orçamentos resultarão em R$ 90,00.
A alternativa é correta.

5. (Fgv 2015) As coordenadas (x, y) de cada ponto do segmento $\overline{AB}$, descrito na figura, representam o comprimento (x) e a largura (y) de um retângulo, ambos em centímetros. Por exemplo, o ponto de coordenadas $(4, 18)$ representa um retângulo de comprimento $4\,cm$ e largura $18\,cm$.



Dentre os infinitos retângulos descritos dessa forma, aquele que possui área máxima tem perímetro, em cm, igual a

a) 20.
b) 38.
c) 40.
d) 45.
e) 48.

Resposta:

[C]

Cada ponto do segmento AB é da forma $(x, -3x+30)$, com $0 \le x \le 6$. Logo, sendo a área, S, do retângulo igual ao produto das coordenadas, temos

$$S = x \cdot (-3x+30) = -3 \cdot (x^2 - 10x) = 75 - 3 \cdot (x-5)^2.$$

Desse modo, o retângulo que possui área máxima tem dimensões $5\,cm \times 15\,cm$, e seu perímetro é igual a $2 \cdot (5+15) = 40\,cm$.

6. (Fgv 2015) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2 + bx + \frac{15}{4}$, com b sendo uma constante real positiva.
Sabendo que a abscissa do ponto de mínimo do gráfico dessa função é igual a ordenada desse ponto, então, b é igual a

a) $\frac{11}{2}$
b) 5
c) $\frac{9}{2}$
d) 4
e) $\frac{7}{2}$

Resposta:

[B]

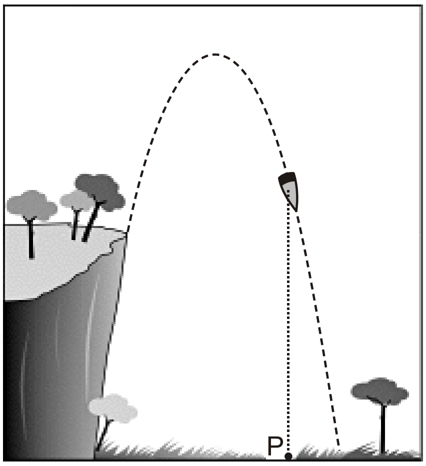
Escrevendo a lei de f na forma canônica, obtemos

$$f(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{15-b^2}{4}.$$

Portanto, sendo $b>0,$ vem

$$-\frac{b}{2}=\frac{15-b^2}{4}\Leftrightarrow b^2-2b-15=0\Rightarrow b=5.$$

7**.** (Fuvest 2015) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura abaixo. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por $P,$ a partir do instante do lançamento, é de $10\text{ m}.$ Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?

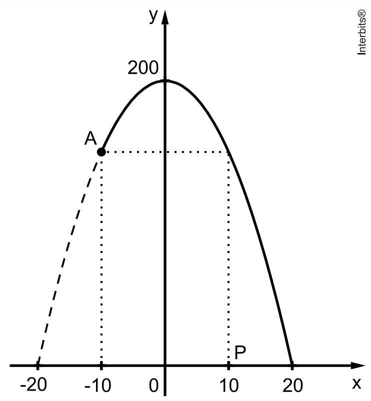


a) 60
b) 90
c) 120
d) 150
e) 180

Resposta:

[D]

Adotando convenientemente um sistema de coordenadas cartesianas, considere a figura.



Sejam A o ponto de lançamento do projétil e a função quadrática $f:[-20, 20] \to \mathbb{R}$, dada na forma canônica por $f(x) = a \cdot (x - m)^2 + k$, com $a, m, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. É imediato que $m = 0$ e $k = 200$. Logo, sabendo que $f(20) = 0$, vem

$$0 = a \cdot 20^2 + 200 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, temos $f(x) = 200 - \frac{x^2}{2}$ e, desse modo, segue que o resultado pedido é

$$f(-10) = 200 - \frac{(-10)^2}{2} = 150\ \text{m}.$$

8**.** (Espcex (Aman) 2015) Um fabricante de poltronas pode produzir cada peça ao custo de R$ 300,00. Se cada uma for vendida por x reais, este fabricante venderá por mês $(600 - x)$ unidades, em que $0 \leq x \leq 600$.

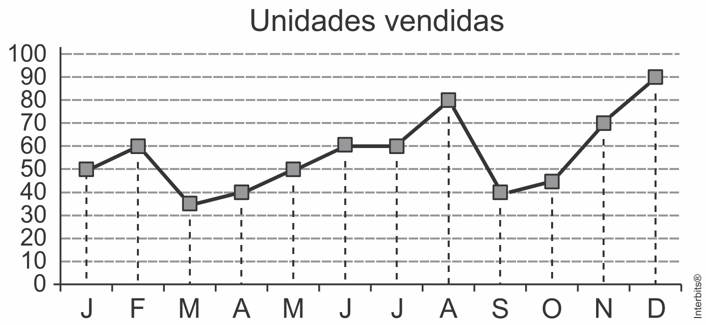
Assinale a alternativa que representa o número de unidades vendidas mensalmente que corresponde ao lucro máximo.
a) 150
b) 250
c) 350
d) 450
e) 550

Resposta:

[A]

O lucro L(x) será dado por $(600 - x) \cdot (300 - x)$. As raízes da função são 300 e 600, o valor de x para que o lucro seja máximo é a média aritmética das raízes, portanto $x_V = (300 + 600) : 2 = 450$. Logo, o número de peças para que o lucro seja máximo, é: $600 - 450 = 150$.

9. (Espm 2015) O gráfico abaixo mostra a variação da quantidade de unidades vendidas por uma pequena fábrica de pranchas de *surf*, durante um ano.



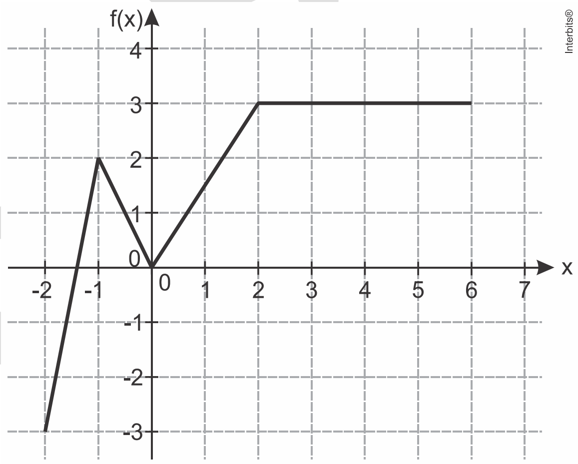
De acordo com o gráfico, podemos concluir que o aumento nas vendas do 2º trimestre para o 3º trimestre foi de:
a) 10%
b) 15%
c) 20%
d) 25%
e) 30%

Resposta:

[C]

De acordo com o gráfico, no segundo trimestre foram vendidas 150 pranchas. Já no terceiro trimestre foram vendidas 180 pranchas. Isso significa um aumento de 30 pranchas em relação ao segundo semestre. Ou seja, o aumento nas vendas do 2º trimestre para o 3º trimestre foi de 20% $(30 \div 150 = 0{,}2 \Rightarrow 20\%)$.

10. (Fgv 2015) O gráfico representa a função f.



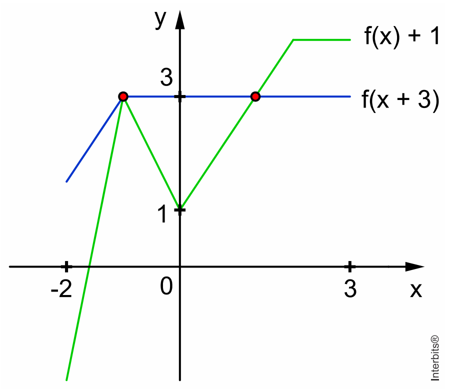
Considerando $-2 \le x \le 3$, o conjunto solução da equação $f(x+3) = f(x)+1$ possui
a) um único elemento.

b) apenas dois elementos.
c) apenas três elementos.
d) apenas quatro elementos.
e) infinitos elementos.

Resposta:

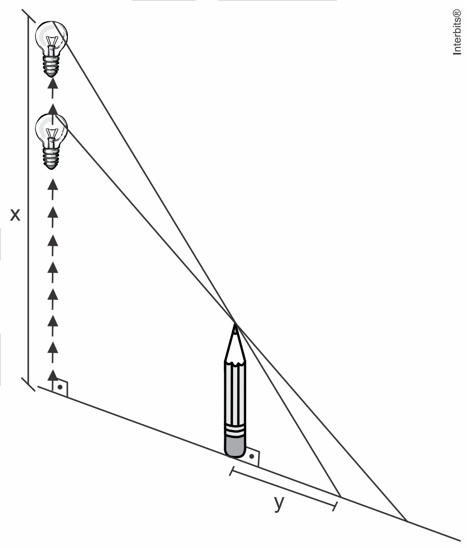
[B]

O gráfico da função $y = f(x+3)$ corresponde ao gráfico da função f deslocado três unidades para a esquerda, enquanto que o gráfico da função $y = f(x)+1$ corresponde ao gráfico da função f deslocado uma unidade no sentido positivo do eixo das ordenadas.

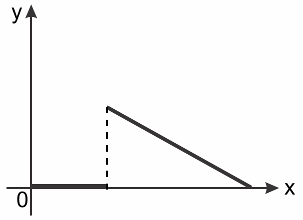


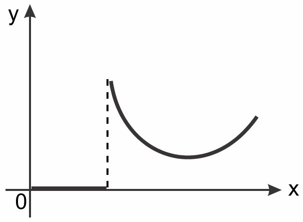
Portanto, de acordo com a figura, podemos concluir que a equação $f(x+3) = f(x)+1$ possui duas soluções no intervalo $[-2, 3]$.

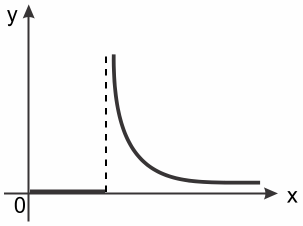
11. (Fgv 2015) Um dispositivo fará com que uma lâmpada acesa se desloque verticalmente em relação ao solo em x centímetros. Quando a lâmpada se desloca, o comprimento y, em cm, da sombra de um lápis, projetada no solo, também deverá variar.

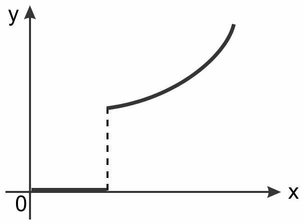


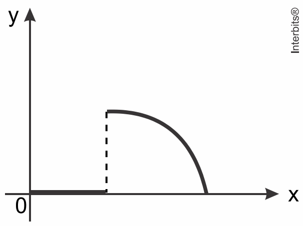
Admitindo a lâmpada como uma fonte pontual, dos gráficos indicados, aquele que melhor representa y em função de x é

a) 

b) 

c) 

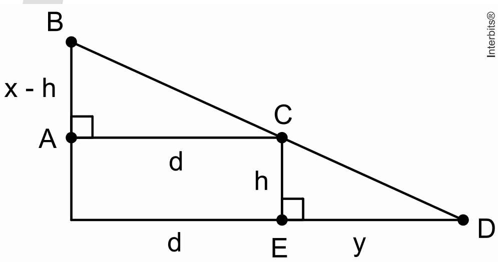
d) 

e) 

Resposta:

[C]

Considere a figura, em que d e h denotam, respectivamente, a distância do lápis para a vertical que contém a lâmpada, e a altura do lápis.



Desde que os triângulos ABC e ECD são semelhantes por AA, vem

$$\frac{y}{d} = \frac{h}{x-h} \Leftrightarrow y = \frac{dh}{x-h}.$$

Portanto, o gráfico que melhor representa y em função de x é o da alternativa [C].

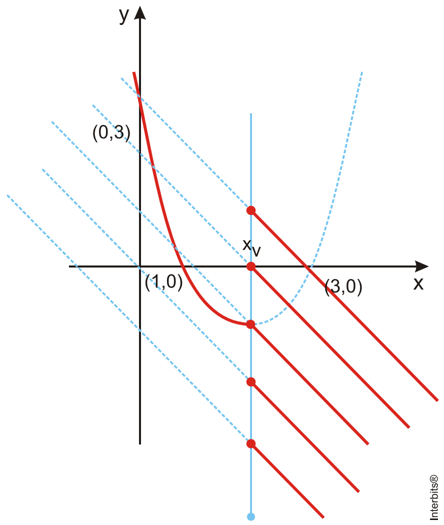
12. (Espcex (Aman) 2015) Sabendo que c e d são números reais, o <u>maior valor</u> de d tal que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x + c, & \text{para } x \geq d \\ x^2 - 4x + 3, & \text{para } x < d \end{cases}$ seja injetora é

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

Resposta:

[C]

O maior de **d**, para que a função seja injetora, coincide com a abscissa do vértice da parábola.



Portanto, $d = x_V = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 1} = 2.$

13. (Espm 2015) Considere as funções reais $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x - k$, com $k \in \mathbb{R}$. Podemos afirmar que $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ para qualquer x real se o valor de k for igual a:

a) 0

b) 1
c) 2
d) -2
e) -1

Resposta:

[A]

Substituindo e desenvolvendo a expressão dada:

$$f \circ g(x) = g \circ f(x) \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x))$$
$$f(g(x)) = 2 \cdot (x-k) + 1 \Rightarrow f(g(x)) = 2x - 2k + 1$$
$$g(f(x)) = 2x + 1 - k$$
$$2x - 2k + 1 = 2x + 1 - k$$
$$-2k = -k$$
$$k = 0$$

14. (Espcex (Aman) 2015) Considere a função bijetora $f:[1,+\infty) \to (-\infty,3]$, definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ e seja (a,b) o ponto de intersecção de f com sua inversa. O valor numérico da expressão $a+b$ é
a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 8.
e) 10.

Resposta:

[B]

Os pontos comuns de uma função com a sua inversa são da forma (a, a), portanto, para determinar estes pontos devemos considerar $f(x) = x$ na função dada. Daí, temos:

$$x = -x^2 + 2x + 2 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \notin [1, +\infty) \text{ ou } x = 2.$$

Logo, o ponto (a, b) pedido é $(2, 2)$ e $2 + 2 = 4.$

15. (Fgv 2014) Um restaurante francês oferece um prato sofisticado ao preço de p reais por unidade. A quantidade mensal x de pratos que é vendida relaciona-se com o preço cobrado através da função $p = -0,4x + 200.$
Sejam k_1 e k_2 os números de pratos vendidos mensalmente, para os quais a receita é igual a R$21.000,00. O valor de $k_1 + k_2$ é:
a) 450
b) 500

c) 550
d) 600
e) 650

Resposta:

[B]

Desde que $p = -0,4x + 200,$ temos

$$p \cdot x = 21000 \Leftrightarrow (-0,4x + 200) \cdot x = 21000$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 500x + 52500 = 0.$$

Portanto, pelas Relações de Girard, segue-se que $k_1 + k_2 = 500.$

16**.** (Espcex (Aman) 2014) Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40.$ Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a
a) 4 lotes.
b) 5 lotes.
c) 6 lotes.
d) 7 lotes.
e) 8 lotes.

Resposta:

[D]

Seja L(x) o lucro obtido, então:

$L(x) = V(x) – C(x) = – 2x^2 + 28x + 40$

O valor de x para que L(x) seja máximo será dado por:

$$x_V = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{28}{2 \cdot (-2)} = 7$$

17**.** (Fgv 2014) Uma fábrica de panelas opera com um custo fixo mensal de R$ 9 800,00 e um custo variável por panela de R$ 45,00. Cada panela é vendida por R$ 65,00. Seja x a quantidade que deve ser produzida e vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a 20% da receita.
A soma dos algarismos de x é:
a) 2
b) 3

c) 4
d) 5
e) 6

Resposta:

[D]

O custo total é dado por $45x+9800,$ enquanto que a receita é igual a $65x.$ Desse modo, temos

$$\begin{aligned} 0{,}2\cdot 65x = 65x-(45x+9800) &\Leftrightarrow 13x = 20x-9800 \\ &\Leftrightarrow x = 1400. \end{aligned}$$

Por conseguinte, a soma dos algarismos de x é igual a $1+4+0+0=5.$

18**.** (Espm 2014) A função $f(x)=ax+b$ é estritamente decrescente. Sabe-se que $f(a)=2b$ e $f(b)=2a.$ O valor de $f(3)$ é:

a) 2
b) 4
c) -2
d) 0
e) -1

Resposta:

[C]

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é estritamente decrescente, então $a<0.$ Além disso, $f(a)=2b$ implica em $a\cdot a+b=2b \Leftrightarrow b=a^2$ e $f(b)=2a$ implica em $a\cdot b+b=2a \Leftrightarrow b=\dfrac{2a}{a+1}.$ Logo,

$$\begin{aligned} a^2=\frac{2a}{a+1} &\Leftrightarrow a\cdot(a^2+a-2)=0 \\ &\Leftrightarrow a\cdot(a-1)\cdot(a+2)=0 \\ &\Leftrightarrow a=0 \text{ ou } a=1 \text{ ou } a=-2. \end{aligned}$$

Portanto, sendo f estritamente decrescente, só pode ser $a=-2.$ Em consequência,

$$f(3)=-2\cdot(3)+(-2)^2=-2.$$